



EXPERIENCIAS DOCENTES INNOVADORAS EN GEOMETRÍA

Trazado y construcción de bóvedas

Innovative teaching experiences in geometry. Tracing and construction of vaults.

RAFAEL MARTÍN TALAVERANO ¹, ISABEL ANTOLÍN CANO ²
¹Universidad del País Vasco – Euskal Herriko Unibertsitatea, España
²Universidad Politécnica de Madrid, España

KEYWORDS

Geometry
Architectural drawing
Vault
Dome
3D model
Teaching
Design

ABSTRACT

The geometry and the architectural drawing are essential tools for the graphical expression, perhaps the most important language within the frames of the architecture and engineering. Although its importance is clear, some of the students which deal with the geometry feel that it is a quite complex and abstract signature, with no relationship with the reality, so that they are not motivated. This paper presents three teaching experiences directed to solve this problem in which a challenge is proposed: the construction of a vault or a dome. In this way, the students had to investigate and understand several geometric concepts.

PALABRAS CLAVE

Geometría
Dibujo de arquitectura
Bóveda
Cúpula
Modelo 3D
Docencia
Diseño

RESUMEN

La geometría y el dibujo son herramientas esenciales para la expresión gráfica, quizás el lenguaje fundamental en los ámbitos de la arquitectura y la ingeniería. Aunque su importancia es innegable, muchos de los alumnos que abordan el estudio de la geometría la perciben como una materia abstracta y compleja, sin relación con la realidad, por lo que no les motiva suficientemente. Este trabajo presenta tres experiencias docentes dirigidas a solucionar este problema en las que se plantea un reto: la construcción de una bóveda o una cúpula. De este modo, los alumnos tuvieron que investigar y entender diversos conceptos geométricos.

Recibido: 12/ 07 / 2022

Aceptado: 22/ 09 / 2022

1. Introducción

La geometría y el dibujo son dos disciplinas fundamentales en el ámbito de la ingeniería y la arquitectura. Efectivamente, la expresión gráfica es el lenguaje fundamental del diseño en estos campos, ya que permite transmitir visualmente de un modo eficaz conceptos formales y espaciales complejos. A pesar de su innegable utilidad, muchos estudiantes perciben la geometría como una materia alejada de sus intereses y de la realidad práctica. El presente trabajo expone varias experiencias docentes en distintos niveles educativos que intentan paliar en la medida de lo posible este problema.

1.1. Breve revisión histórica sobre el uso de la geometría

La representación gráfica pudo tener su origen en la Prehistoria, en la que el dibujo y la pintura se asociaban a valores emotivos y de evocación, dada su alta capacidad de evocación. Por su parte, el origen de la geometría en nuestra cultura occidental se remonta a la Antigüedad, y se puede relacionar con actividades catastrales de medición de terrenos y propiedades. De este modo, los inicios de la geometría plana pueden enmarcarse en el ámbito de la representación gráfica con un carácter eminentemente práctico (Sánchez 1998, 22).

Sin embargo, no es hasta la Antigüedad Clásica cuando la geometría adquiere carácter de ciencia especulativa independientemente de su aplicación práctica. Los estudios sobre geometría métrica se recogen en los Elementos de Euclides (III a. C.), una obra de referencia indiscutible en esta materia, y alcanzan su culminación con las obras de Apolonio y Arquímedes (II a. C.). Es en este momento cuando la geometría se estudia de un modo sistemático y ordenado, basada en desarrollos deductivos para formar un corpus de teoremas y construir una ciencia que sentará los cimientos para épocas posteriores (Sánchez 1998, 22).

Durante la Edad Media, la geometría vuelve a tener un uso eminentemente práctico, ligado a la resolución de problemas de trazado y construcción de edificios. Son conocidos los dibujos del cuaderno de Villard de Honnecourt (s. XIII), en los cuales se exponen algunos trazados geométricos destinados a la resolución de problemas constructivos (Erlande-Brandenburg *et al.* 2001). Además, en algunos edificios góticos se han encontrado trazas y montañas para la talla de piezas. De finales de la Edad Media y comienzos de la Edad Moderna se conservan dibujos de trazado de bóvedas fundamentalmente en el ámbito centroeuropeo (*Wiener Sammlungen, Codex Miniatus 3*, etc.). Existe por lo tanto una notable diferencia en la concepción de la geometría, que en el mundo clásico se desarrolla para construir una ciencia, mientras que, en la Edad Media, esta ciencia es empleada como herramienta para resolver problemas constructivos, de modo que no progresa de un modo deductivo, sino empírico, derivando en lo que algunos autores han venido llamando la geometría constructiva (Shelby 1997).

Con la llegada del Renacimiento se recupera la visión clásica de la geometría como ciencia, produciéndose desarrollos mediante estudios sobre la visión humana y la denominada "perspectiva natural". Es en este momento cuando artistas como Durero o Alberti analizan las leyes que generan las perspectivas mediante los rayos de proyección, es decir, el concepto actual de la representación como proyección y sección (Sánchez 1998, 23). De este modo, el control de la percepción del espacio es uno de los grandes logros de la perspectiva y, al mismo tiempo, sienta las bases de la concepción espacial de la arquitectura renacentista. En paralelo, a partir de los comienzos de la Edad Moderna se escriben una notable cantidad de tratados de construcción que, en el caso de la cantería, emplean la geometría como herramienta fundamental para la consecución de una correcta talla de las piezas.

En el siglo XVIII se produce un importante impulso hacia la racionalización geométrica de la representación ya que, por un lado, los tratados de estereotomía alcanzan un desarrollo muy elevado y, por otro, se crean las Academias francesas que consolidan distintos ámbitos disciplinares tecnológicos que potencian el desarrollo de las ciencias aplicadas. Es a finales de este siglo cuando se publican las lecciones de geometría descriptiva de Gaspar Monge (1795), en las cuales se sistematiza definitivamente la representación gráfica de los cuerpos en el espacio y ésta adquiere condición de ciencia autónoma (Sánchez 1998, 24).

Posterior hitos, como la aparición de la fotografía en el siglo XIX o la creación y desarrollo de los ordenadores en el siglo XX han supuesto notables aportaciones para la representación gráfica y su aplicación en el ámbito de la arquitectura. Además, de la mano de la ingeniería de la automoción, durante el siglo XX se dieron los primeros pasos en la creación de nuevas formas geométricas basadas en curvas de Bèzier, curvas B-Spline o superficies Nurbs, que luego han tenido una amplia aplicación no sólo en el campo de la ingeniería o la arquitectura, sino también en el de las artes visuales, como es el caso de las películas de animación, por ejemplo (Pottmann *et al.* 2007).

Finalmente, cabe reseñar el impacto provocado por las ideas que dieron lugar a la denominada geometría no euclidiana, que partían de la negación del quinto postulado de Euclides, y cuyas bases se sentaron en el siglo XIX con las aportaciones de Gauss, Lobachevsky y Bolyai (geometría hiperbólica, con curvatura negativa), así como de Riemann (geometría elíptica, con curvatura positiva). Estas teorías geométricas contribuyeron al desarrollo, entre otras, de la teoría de la relatividad, así como al avance de las teorías cosmológicas modernas sobre la configuración del universo.

1.2. Coyuntura actual de la enseñanza del dibujo técnico y la geometría

En la enseñanza preuniversitaria nos encontramos ante un repunte en el interés y la demanda de las materias relacionadas con el diseño gráfico; un diseño gráfico dirigido a la creación de todo tipo de objetos y elementos virtuales en un plano, relacionado con la tecnología y las ingenierías.

En la asignatura de “plástica” los contenidos abarcan desde el control de volumen, la forma, la textura y la proporción, y van alcanzando complejidad de trazado hasta la geometría más pura de resolución de trazados de triángulos o elaboración de perspectivas axonométricas y cónicas. Queda en manos del departamento de tecnología a través de sus proyectos el poner en valor talleres constructivos con estructuras sencillas y maquetas de trabajo de materiales reciclados trabajando las competencias transversalmente. El aprendizaje del dibujo técnico queda condensado en dos cursos de Bachillerato. En el primero se aborda una recopilación de contenidos relacionados con la reproducción de polígonos, curvas cónicas y representación normalizada de piezas. El segundo curso supone un notable salto en la complejidad, ya que está dirigido a la resolución de problemas de tangencias, transformaciones e intersecciones, a los que habitualmente se llega con una base geométrica escasa.

El problema principal detectado no parece ser en este caso el conocimiento tecnológico por parte del profesorado, que desde la complejidad desatada por la pandemia del COVID-19 se ha adaptado y la transformación está siendo global, sino la velocidad de cambio de los contenidos a abordar y la falta de profundidad con que se abordan. Incorporar programas de CAD en estos niveles resulta siempre una propuesta atractiva y bien acogida. El aprendizaje de la herramienta suele restar espacio al análisis profundo, convirtiéndose finalmente en un problema de falta de tiempo.

En el marco de la enseñanza universitaria y, en concreto, en el Grado en Fundamentos de la Arquitectura, la Orden EDU/2075/2010 establece las siguientes competencias del módulo propedéutico “Ciencias Básicas y Dibujo” que, de algún modo, están relacionadas con la geometría:

Aptitud para:

- Aplicar los procedimientos gráficos a la representación de espacios y objetos;
- Concebir y representar los atributos visuales de los objetos y dominar la proporción y las técnicas del dibujo, incluidas las informáticas.

Conocimiento adecuado y aplicado a la arquitectura y al urbanismo de:

- Los sistemas de representación espacial;
- El análisis y teoría de la forma y las leyes de la percepción visual;
- La geometría métrica y proyectiva;
- Las técnicas de levantamiento gráfico en todas sus fases, desde el dibujo de apuntes a la restitución científica;
- Las bases de topografía, hipsometría y cartografía y las técnicas de modificación del terreno.

Se puede observar cómo hay una clara intencionalidad por potenciar la aplicación de la geometría y el dibujo a distintos aspectos relacionados con la arquitectura: la representación de espacios y objetos, el análisis de las características de las formas arquitectónicas y de la percepción visual, o la representación y modificación de los terrenos. Es decir, se concibe como una herramienta para ser aplicada en varios ámbitos de la arquitectura. Podríamos decir que es una idea más cercana al sentido medieval (la geometría como herramienta para la resolución de problemas constructivos) que a la concepción euclidiana (construcción de una ciencia).

Sin embargo, en numerosas ocasiones, la enseñanza de la geometría en el ámbito universitario sigue desarrollándose con un guión más parecido a una sucesión de temas teóricos ordenados con una lógica enciclopédica, que carece de una conexión directa con los problemas prácticos de la arquitectura. Es por ello por lo que tradicionalmente ha habido una falta de interés del alumnado hacia la geometría, ya que la ven como una asignatura “teórica” que no es fundamental para el ejercicio del oficio de arquitecto. Se trata para ellos de una materia secundaria que es preciso superar para continuar con las actividades que realmente les interesan. Y, nada más lejos de la realidad, la geometría ha estado en la base de la creación arquitectónica desde sus inicios. Por lo tanto, nos encontramos ante un problema en la enseñanza de esta materia y gran parte de la responsabilidad recae en los propios docentes, que, hasta el momento, no hemos conseguido transmitir al alumnado el interés y la gran utilidad que el conocimiento de la geometría les puede proporcionar.

Además de lo anterior, es destacable la carencia que, en varias ocasiones, se produce en relación con el manejo de las herramientas digitales. Tradicionalmente, la geometría y el dibujo de arquitectura se han aprendido con útiles de dibujo manual. Aunque las tecnologías digitales permiten la creación y el análisis de formas arquitectónicas con un potencial muy notable, es cierto que hay una fuerte resistencia entre algunos docentes al empleo de estas herramientas complementariamente a las manuales. A pesar de que la propia arquitectura ha avanzado y de que muchos de los edificios que se construyen hoy en día serían muy complicados de ejecutar sin aplicaciones informáticas, nos cuesta introducirlas en el desarrollo de nuestra actividad docente. Es por ello por lo que es necesaria una reflexión sobre el papel de las herramientas informáticas en el marco de la enseñanza de la geometría.

2. Objetivos

El presente estudio tiene su justificación en la doble necesidad de potenciar, por un lado, la conexión entre la enseñanza de la geometría y su aplicación práctica en el marco de la arquitectura, y, por otro, el empleo de las herramientas digitales complementariamente al dibujo manual.

Para ello, presentamos tres experiencias docentes que tienen su base en estas dos ideas. Se trata de tres casos en los que se ha tomado como eje central el reto del diseño y la construcción de bóvedas medievales y renacentistas. A partir de este planteamiento eminentemente práctico, el objetivo ha consistido en desarrollar distintas actividades con distintos tipos de alumnos (ESO, Bachillerato, Enseñanza Superior) para analizar la respuesta de los estudiantes a los retos planteados y estudiar la eficacia de estos planteamientos. Además, se ha buscado comparar estas experiencias en niveles educativos distintos y poder obtener conclusiones de ello que puedan ser aplicadas en el futuro.

3. Experiencias docentes

3.1. Bóveda de crucería cuatripartita (colegio Ártica)

La primera de las experiencias docentes que presentamos se desarrolló en el colegio Ártica (Cooperativa de Enseñanza José Ramón Otero) en 2018. En este caso, el reto consistió en la construcción de una bóveda gótica de crucería cuatripartita, es decir, una sencilla bóveda con cuatro arcos laterales, dos diagonales y una clave central. Para ello, se organizó un taller que incluía alumnos tanto de Bachillerato como de 2º de ESO. Los primeros, en el marco de las asignaturas de Dibujo Técnico y Matemáticas, asumieron el rol de los diseñadores y maestros constructores de la bóveda. Los segundos, en el marco de las asignaturas de Tecnología y Ciencias Sociales, adoptaron el rol de los canteros medievales encargados de la labra de las piezas y de su colocación. Este taller se desarrolló inspirado en el Taller de Construcción Gótica que se llevó a cabo por primera vez en el curso 2008-09 impulsado por el profesor José Carlos Palacios en la Universidad Politécnica de Madrid (Palacios & Martín, 2009), el cual mereció un premio a la innovación educativa por parte de dicha universidad.

El objetivo de esta actividad radicaba en reproducir el proceso de trazado y construcción de una bóveda de un modo similar al que se empleaba en la Edad Media, acercando a los alumnos distintos conocimientos relativos a la geometría, las matemáticas, la construcción y la historia integrados en un mismo reto: convertirse en maestros canteros para lograr, entre todos, diseñar, tallar y colocar las piezas que configuraban la bóveda y conseguir que éstas se mantuviesen en su posición sin caerse.

Se trataba, por ello, de un reto a la vez interdisciplinar y colaborativo. El enfoque, como se ha mencionado, implicaba la integración de conocimientos de distintas materias, desde las matemáticas, la tecnología, hasta la historia. De este modo, se pretendía enlazarlas para que los alumnos comprendiesen las relaciones entre las mismas y así poder aumentar su motivación e interés por ellas. A la vez, se diseñó un planteamiento que incluía la cooperación entre alumnos de distintos niveles (2º de la ESO y Bachillerato), adaptando las tareas para cada uno y superando las tradicionales barreras que tienden a dividir al alumnado en bloques inconexos. Con estas premisas se inició el taller, el cual consistió en tres fases fundamentales: trazado de la bóveda, talla de las piezas y montaje de la bóveda.

La primera fase fue la correspondiente al diseño y trazado de la bóveda, la cual fue desarrollada fundamentalmente por los alumnos de Bachillerato. Tal y como era habitual en la época medieval, el sistema de trazado de bóvedas góticas se basaba en dos elementos principales, a saber, la planta y las elevaciones de los nervios (Rabasa, 2009). La planta (proyección horizontal de la bóveda) constituía la base de trabajo para el replanteo y la ejecución del cerramiento abovedado. Esta representación incluía únicamente la proyección horizontal de los ejes de los nervios, es decir, la línea correspondiente a su plano medio. Se trataba de una indicación geométrica de la posición y alineación de los distintos nervios, con la clara intención de ser una herramienta sencilla y práctica para la obra.

A partir del trazado de la planta, se procedía a obtener la monte de sus nervios, es decir, las elevaciones en altura de dichos arcos. Las líneas de los arcos, proyectadas en la planta y en verdadera magnitud en la monte, constituían las guías fundamentales para la talla de las dovelas (cada una de las piezas que componen un nervio) y las claves (piezas de cruce de varios nervios). Estos dibujos se realizaban a escala real en una superficie que bien podía ser el suelo o la pared de los propios edificios o en espacios habilitados para los canteros.

En nuestro caso, el trazado de la bóveda se dibujó también a escala real sobre un papel de grandes dimensiones a partir de las indicaciones geométricas dadas por los profesores. Se emplearon cuerdas y lápices, de un modo similar al que se debió emplear en la Edad Media, para dibujar en su tamaño natural tanto la planta (en proyección horizontal) de la bóveda como los arcos (en proyección vertical) de la misma. Los alumnos pudieron comprobar las dificultades propias del trazado a gran escala de arcos y rectas para conseguir mantener un grado de exactitud razonable (figura 1).

Figura 1. Dibujo de la planta y los alzados de los arcos de la bóveda en el taller del colegio Ártica.

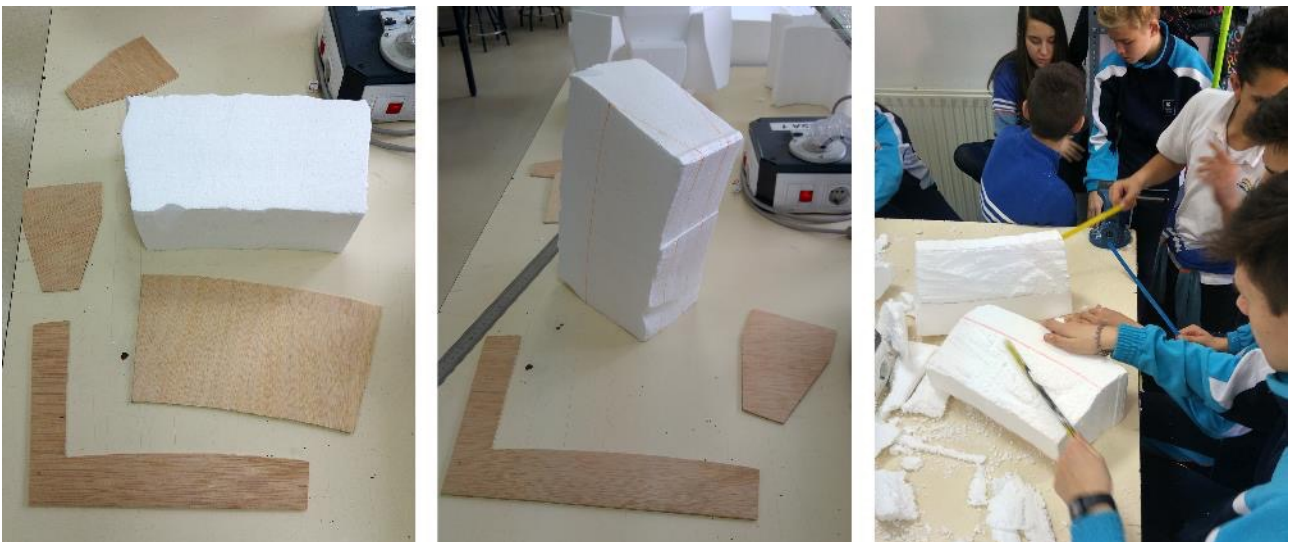


Fuente: imagen de los autores

La segunda fase correspondió a la talla de las piezas y fue llevada a cabo por los alumnos de 2º de ESO asumiendo el rol de canteros medievales. Para hacer viable el taller, se sustituyó el material históricamente empleado en la construcción de bóvedas (la piedra), por un corcho blanco fácil de cortar, pero suficientemente compacto y resistente. En general, las piezas de una bóveda gótica medieval pueden clasificarse en tres grupos: las dovelas (las piezas que forman los arcos o nervios de la bóveda), las jarjas (el arranque de la bóveda) y las claves (piezas especiales que conforman el cruce de los nervios).

Según la tradición constructiva medieval, la talla de las dovelas de los nervios era llevada a cabo por los canteros controlando dos aspectos fundamentales. Por un lado, la sección transversal de la pieza, es decir, su perfil, el cual estaba determinado por la denominada plantilla de testa. Se trataba de una plantilla cortada en un material rígido y que servía de guía para poder labrar la dovela. Por otro lado, era necesario controlar la curvatura de del arco a partir del dibujo de la montea, definida en este caso por otra plantilla denominada baivel, el cual era similar a una escuadra de carpintero, pero con uno de sus lados curvos, siguiendo la curvatura que debían tener los arcos. De este modo, manejando la plantilla de testa y el baivel de cada nervio, y con grades dosis de habilidad y experiencia, se podían obtener las dovelas de la bóveda. En el caso que nos ocupa, los alumnos de 2º de ESO labraron todas las dovelas con la ayuda de las plantillas de testa y los baiveles que se obtuvieron a partir de los dibujos realizados por los alumnos de Bachillerato en la primera fase de diseño y trazado. Para ello, cortaron las piezas con sierras y cortadoras de hilo caliente con la supervisión de los profesores (figura 2).

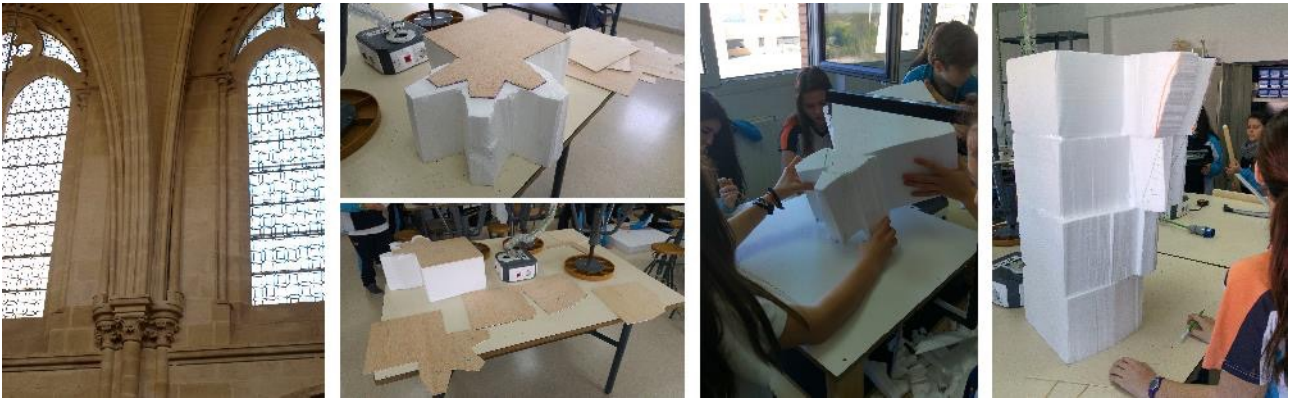
Figura 2. Proceso de talla de las dovelas por parte de los alumnos de 2º de ESO



Fuente: imagen de los autores.

El segundo tipo de piezas que constituían una bóveda gótica eran las que formaban las jarjas, es decir, el arranque de la bóveda. Esta parte constituía la conexión de los arcos o nervios de la bóveda con sus soportes, y eran piezas de mayor complejidad que las dovelas. Las jarjas estaban construidas generalmente con hiladas horizontales trabadas con el muro, y se desarrollaban en vertical mediante vuelos sucesivos formalizando el arranque de los nervios en la zona de confluencia de los mismos. En nuestro caso, los alumnos de 2º de ESO también tallaron las piezas de las jarjas con el mismo material y usando plantillas para las caras superior e inferior, de modo que se asegurase un encaje adecuado entre las piezas. A pesar de la dificultad del reto para alumnos sin experiencia alguna en el campo de la talla, los resultados fueron aceptables (figura 3).

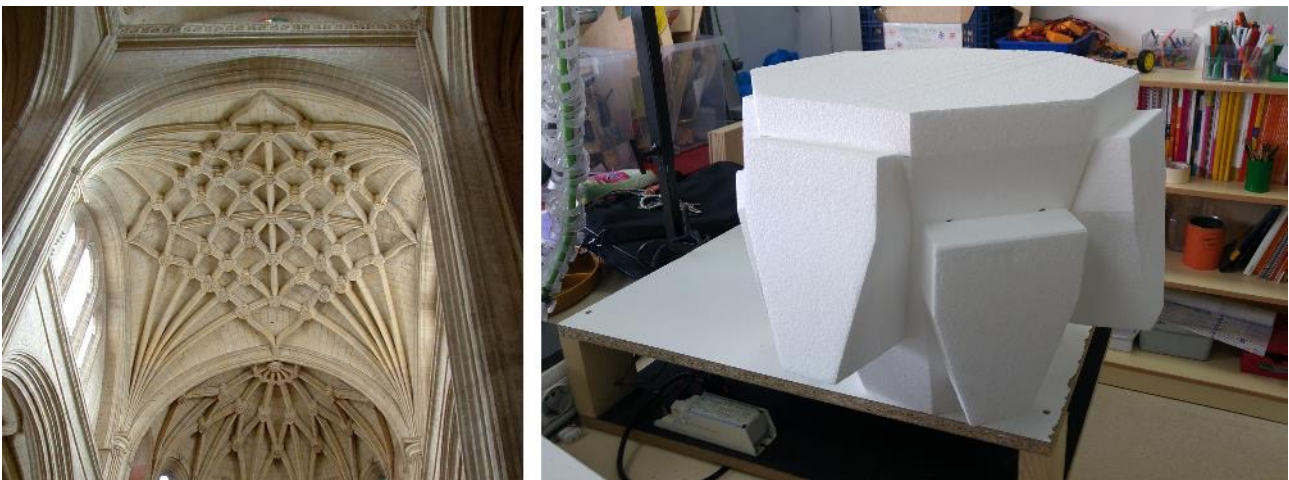
Figura 3. Jarjas de una de las bóvedas de la catedral de Burgos (izquierda). Proceso de talla de las jarjas en el taller del colegio Ártica (centro y derecha).



Fuente: imagen de los autores.

Finalmente, el tercer tipo de piezas que formaban una bóveda gótica eran las claves, es decir, los elementos que materializaban la confluencia de varios nervios en un punto. Las claves eran, por lo tanto, piezas singulares que servían para resolver el cruce de los nervios, y a ellas acometían los distintos nervios según la dirección marcada por sus ejes en planta, que, en general, se cortaban en el eje vertical de dicha clave. En el caso que nos ocupa, dada la dificultad de la labra de las claves y la importancia de un buen resultado para asegurar el correcto encaje de los nervios de la bóveda, las piezas de las claves fueron creadas por una empresa externa (figura 4). De este modo, se completó la segunda fase de la construcción de la bóveda, es decir, la talla de sus piezas.

Figura 4. Bóveda con claves entre los nervios de la catedral de Segovia (izquierda) y pieza de clave del taller del colegio Ártica (derecha)



Fuente: imagen de los autores.

Finalmente, se abordó la tercera fase, correspondiente al montaje de la bóveda. En la Edad Media, este proceso implicaba, en general, los siguientes pasos. El primero consistía en la ejecución de los muros perimetrales y los soportes de la bóveda. Sobre cada soporte se colocaban las piezas de las jarjas, es decir, los arranques de las bóvedas. Aproximadamente en el nivel superior de las jarjas se solía construir una gran plataforma de madera sustentada sobre andamios, en la que se dibujaba la proyección en planta de la bóveda, a modo de guía o replanteo para colocar sus piezas. Coincidiendo con los puntos de cruces de los ejes de los nervios dibujados en la planta, se colocaban pies derechos o puntales verticales de madera con la longitud adecuada para poder situar sobre ellos las claves. Una vez ejecutada la plataforma y los puntales verticales, se procedía a montar las cimbras, es decir, los arcos de madera que servirían de apoyo temporal a los arcos definitivos de piedra, los nervios de la bóveda.

Una vez preparada la estructura auxiliar de madera, podía procederse con la colocación de las claves, que se efectuaba con anterioridad a la disposición de las dovelas de los nervios. Por su parte, dichas dovelas se colocaban probablemente de un modo ascendente, desde el plano superior de las jarjas hasta la clave. Una vez que la red de nervaduras con sus claves quedaba completamente ejecutada, se procedía a la colocación de las piezas de plementería, es decir, las piezas que cubrían el espacio entre los nervios de la bóveda.

Con la estructura de la red de nervaduras y la cáscara de plementería ejecutada, el último paso en la construcción de la bóveda de crucería consistía en el remate del trasdós (la cara superior de la bóveda), consistente en un revestimiento con mortero de cal que aportaba un mejor comportamiento mecánico al plemento. Además, para mejorar la estabilidad de las fábricas, era usual rellenar los riñones de la bóveda (la zona de las esquinas) con hormigón aligerado hasta una cota aproximadamente igual a un tercio de la altura total de la bóveda.

En el caso que nos ocupa, se planteó la construcción de la bóveda de un modo similar al descrito, pero sin llegar a ejecutarse los plementos (la superficie de relleno entre los arcos). De este modo, una vez talladas las piezas (dovelas, jarjas y claves), se inició el montaje de la bóveda comenzando por la construcción de la estructura auxiliar de madera. Para ello, se asumió que el suelo era la plataforma horizontal y, sobre ella, se colocó el dibujo de la planta de la bóveda. Después, se cortaron las piezas verticales de madera que sujetarían las claves. Para calcular su altura, fue necesario recurrir al dibujo de la montea de los arcos, determinando la ubicación de cada clave. Una vez cortadas, se les colocó una pequeña tabla horizontal en la parte superior para el correcto apoyo de dichas claves, y se colocaron sobre la planta. Estos pies derechos se arriostraron convenientemente para lograr una estructura estable frente al vuelco. Finalmente, se cortaron las cimbras, es decir las tablas de soporte temporal de las dovelas de los arcos. Para el corte de dichas piezas, una vez más, se usó como guía el trazado de la montea de los arcos, es decir, su dibujo a escala real (figura 5).

Figura 5. Montaje de la estructura auxiliar de madera para la construcción de la bóveda



Fuente: imagen de los autores.

Con la estructura auxiliar de madera completa, se procedió a la colocación de las piezas de la bóveda (jarjas, dovelas y claves). El proceso fue delicado y hubo que realizar varias correcciones sobre la marcha para asegurar el adecuado ajuste de las piezas, algo que, por otro lado, era usual en la época medieval. Esta es posiblemente la fase que mayor interés despertó en los alumnos, puesto que fue entonces cuando vieron materializado el resultado del trabajo colectivo que venían realizando (figura 6).

Figura 6. Montaje de la bóveda



Fuente: imagen de los autores.

De igual modo que en la Edad Media, la construcción de la bóveda concluía con la retirada de la estructura auxiliar de madera, lo cual se denominaba descimbrado de la bóveda. De igual modo que en esta época histórica, para nosotros este fue el momento culminante del trabajo, impregnado de la emoción por ver si la estructura diseñada y creada con tanto esfuerzo era finalmente capaz de sostenerse por sí misma. Tras momentos de gran

incertidumbre, el resultado final fue exitoso y todos, alumnos y profesores, pudimos disfrutar de este momento tan especial (figura 7).

Figura 7. Resultado final tras el descimbrado de la bóveda.



Fuente: imagen de los autores.

Sin duda alguna, la culminación de este trabajo ayudó a hacer comprender a los alumnos los conceptos estudiados y a disfrutar de la experiencia vivida. Los conceptos geométricos derivados del trazado de la bóveda, tanto en su proyección horizontal como las proyecciones verticales de los arcos, fueron empleados por los alumnos para la resolución del problema práctico, igual que sucedía en la Edad Media. La talla de las piezas de la bóveda y el corte de los elementos de la estructura auxiliar exigieron tanto el entendimiento del trazado como la búsqueda de datos en el mismo. Por ello, creemos que esta experiencia fue muy positiva y esperamos que quede en el recuerdo de los alumnos.

3.2. Cúpula esférica (Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid)

La segunda experiencia docente que presentamos se llevó a cabo durante los cursos 2017-18 y 2018-19 en el marco de la asignatura Geometría y Dibujo de Arquitectura 1 del Grado en Fundamentos de la Arquitectura. Se trató, por lo tanto, de una actividad realizada en el primer curso del Grado universitario.

La asignatura de Geometría y Dibujo de Arquitectura 1 aborda, por un lado, los sistemas de representación más comunes en el ámbito de la expresión gráfica arquitectónica y, por otro, las superficies geométricas de uso común en Arquitectura. En el inicio de este segundo bloque, se tratan las superficies denominadas básicas, es decir, la esfera, el cono y el cilindro y, para ello, se usan generalmente como modelos edificios históricos clásicos que incluyen cúpulas y bóvedas generadas mediante estas superficies.

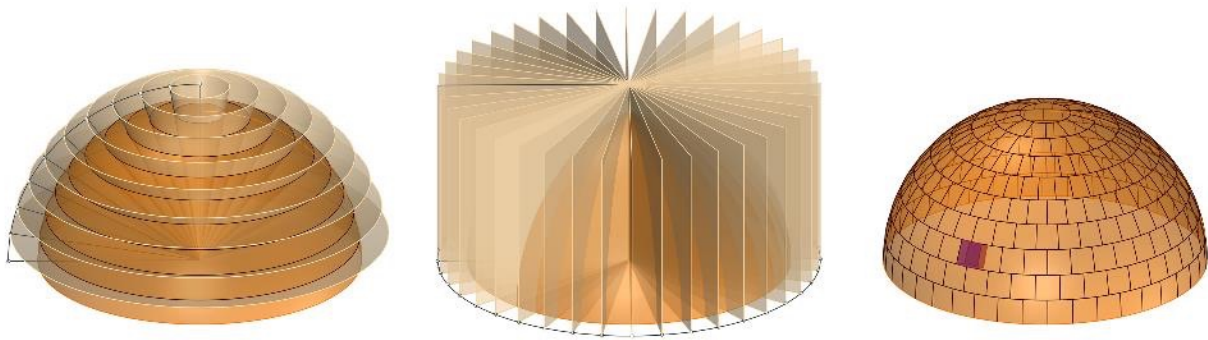
Las actividades que presentamos se centraron en el estudio, definición y modelado digital de cúpulas esféricas: en el curso 2017-18 se trató de una cúpula sobre pechinas, mientras que en el curso 2018-19 fue una bóveda vaída, es decir, una semiesfera cortada por cuatro planos verticales. El objetivo fue no sólo conocer las propiedades geométricas de esta superficie, sino hacerlo a través del reto de construir virtualmente una cúpula modelando sus piezas. Al contrario que en el taller presentado en el apartado anterior, en este caso las herramientas informáticas de modelado fueron imprescindibles para reproducir digitalmente el proceso tradicional del corte de las piedras (lo que en términos técnicos se conoce como la estereotomía).

El empleo de la esfera para la construcción de cúpulas en la historia de la Arquitectura se remonta a la Antigüedad, siendo una de las superficies más empleadas históricamente por su gran impacto y significación espacial. Por ello, en una gran cantidad de edificios se construyeron cúpulas en los espacios singulares, de modo que la geometría esférica subrayaba el concepto de centralidad y homogeneidad espacial. No es de extrañar, por lo tanto, que este elemento arquitectónico sea uno de los más frecuentes en los tratados de cantería que surgieron fundamentalmente desde el principio del Renacimiento. Cabe destacar el tratado de Alonso de Vandelvira (Vandelvira 1585), una de las referencias fundamentales en el estudio de la estereotomía renacentista y cuyo

manuscrito original se encuentra en la biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid, donde se desarrolló la presente actividad docente.

En estos tratados, se explicaban los métodos de corte de las piezas que conformarían la cúpula, es decir, las dovelas. Según explican diversos autores que han analizado estos tratados (Calvo 2020, Palacios 1990 y Rabasa 2000), para configurar las dovelas era necesario controlar y definir tres tipos de superficies de la cúpula esférica. Para el modelado digital de dichas dovelas que llevaron a cabo los alumnos se tuvieron por lo tanto que definir estas superficies tal y como se describe a continuación (figura 8).

Figura 8. Proceso de definición geométrica de una dovela en una cúpula esférica: determinación de conos para los lechos (izquierda), situación de planos verticales para las juntas (centro) y despiece final (derecha).

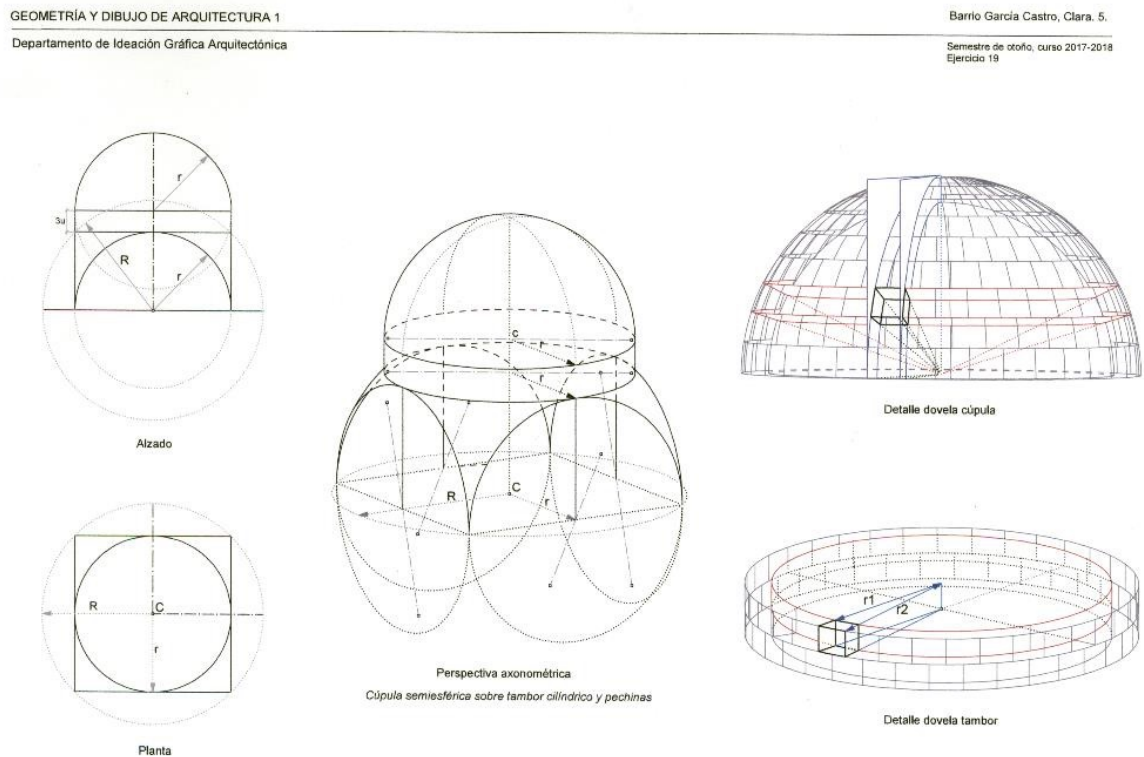


Fuente: imagen de los autores.

En primer lugar, puesto que todos los elementos constructivos tienen un grosor, se establecían las caras externa e interna de la cúpula, es decir sus caras de extradós e intradós. Estas superficies eran esféricas, y se definían a partir de un mismo centro para las dos esferas, aunque tenían distinto radio, ya que la diferencia de los radios era precisamente el espesor de la cúpula. En segundo lugar, se definían las superficies correspondientes a los lechos, es decir, sus límites superior e inferior de las dovelas. En este caso, las superficies eran conos, los cuales tenían en todos los casos sus vértices en el mismo punto que el centro de la esfera, variando el ángulo de estos. Mediante la definición de los sucesivos conos, se establecían las hiladas o filas de dovelas colocadas a una misma altura. En tercer y último lugar, se determinaban los límites laterales o juntas de las dovelas, las cuales se configuraban con haces de planos verticales cuya intersección era una recta vertical situada en el centro de la esfera. Por razones constructivas, las juntas debían situarse contrapeadas, alternándose de una hilada a otra, obteniéndose así el despiece completo de la cúpula.

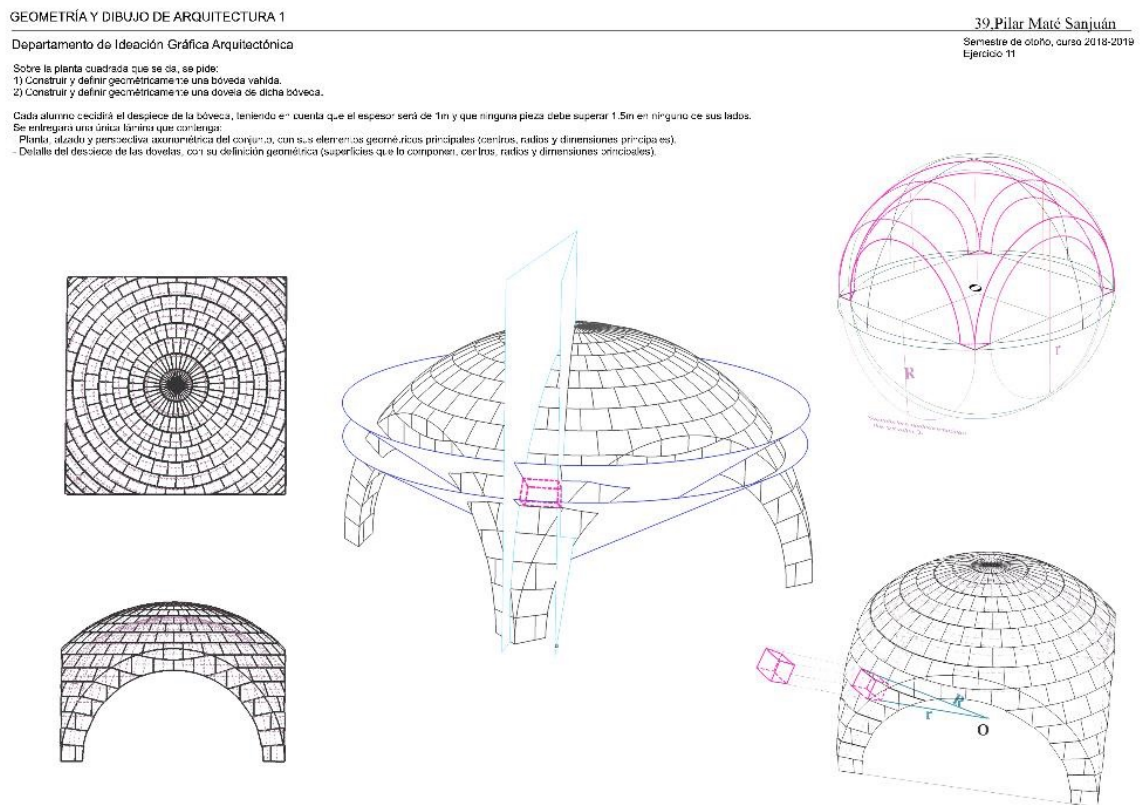
En los tratados de cantería se describe el proceso por el cual los canteros podían tallar las piezas usando plantillas y guías geométricas a partir de la definición de las esferas, los conos y los planos verticales anteriormente mencionados. En nuestro caso, el trabajo de los alumnos consistió en el modelado tridimensional con una herramienta informática apropiada. Por ello, aunque no experimentaron el proceso real de talla de una dovela de piedra, sí se enfrentaron al reto de establecer los datos necesarios para la generación de la cúpula, así como ir definiendo los parámetros geométricos para poder tallar “virtualmente” las dovelas. Como resultado, obtuvieron los despieces para una cúpula sobre pechinas (figura 9) y para una bóveda vaída (figura 10). Una vez más, la necesidad de generar estos elementos arquitectónicos motivó a los alumnos para indagar las características geométricas de las superficies que los configuran. El empleo de las herramientas informáticas de dibujo y modelado 3D permitió además realizar el proceso de un modo sencillo y altamente visual, reforzando el proceso de aprendizaje.

Figura 9. Estudio de una cúpula sobre pechinas realizado por la alumna Clara Barrio García-Castro



Fuente: imagen de la autora.

Figura 10. Estudio de una bóveda vaída realizado por la alumna Pilar Maté Sanjuán



Fuente: imagen de la autora.

3.3. Bóveda de crucería estrellada (Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad Politécnica de Madrid)

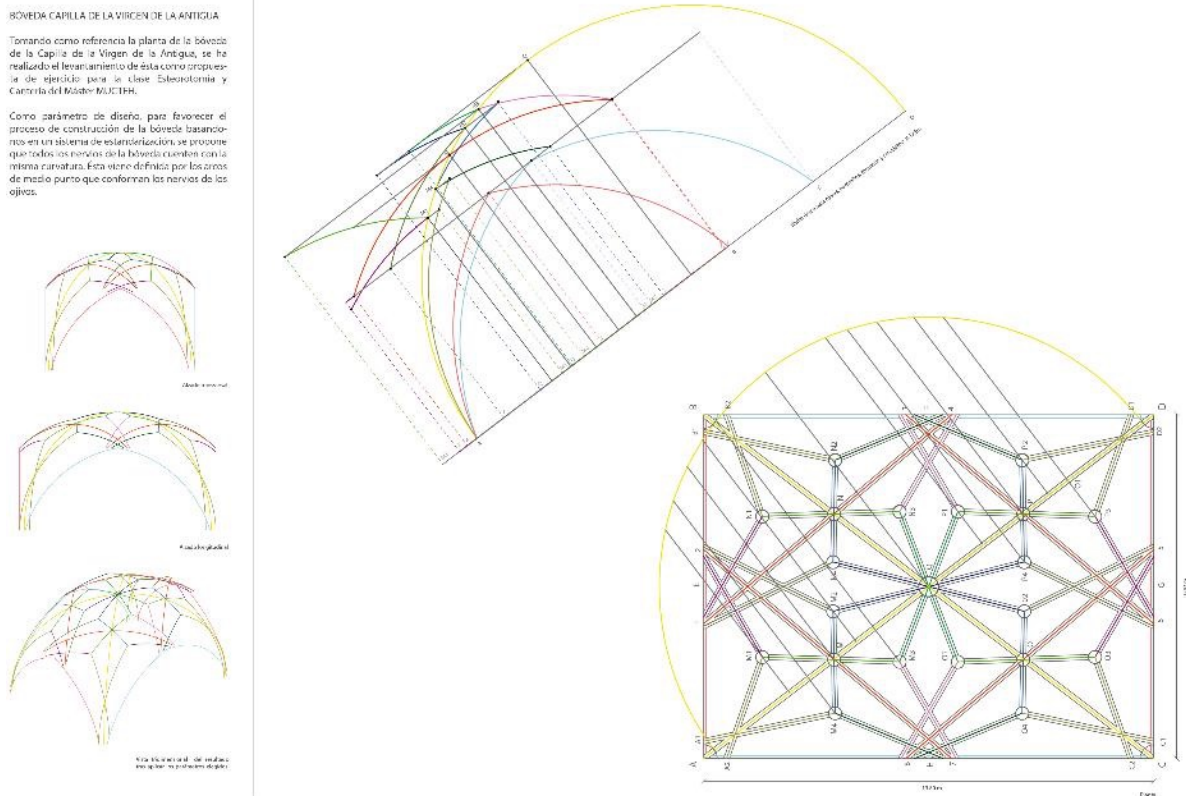
El último caso que presentamos corresponde al de mayor complejidad y, por lo tanto, al desarrollado en el nivel educativo más alto, realizado en el curso 2017-18 en el marco de la asignatura Estereotomía y Cantería del Máster Universitario en Construcción y Tecnología de Edificios Históricos. En este caso, se planteó el trazado y modelización digital de una bóveda de crucería, pero no de una sencilla bóveda cuatrimpartita (con dos nervios diagonales únicamente) como la que se construyó en la primera de las actividades presentadas, sino de lo que se denominan bóvedas estrelladas, es decir, con múltiples nervios configurando dibujos más complejos.

Este tipo de bóvedas se crearon a finales de la Edad Media y principios del Renacimiento, en el que se denomina periodo tardogótico, y florecieron especialmente en ámbitos geográficos como la Península Ibérica, en Gran Bretaña o Centroeuropa (las actuales Alemania, Austria, Polonia y la República Checa). Aunque la historiografía tradicional las consideró en un principio obras decadentes o en un segundo nivel frente a las bóvedas góticas del denominado periodo clásico (siglo XIII), estudios posteriores han puesto en valor su complejidad geométrica y constructiva, así como el profundo conocimiento y habilidad de los maestros canteros que las erigieron (Gómez Martínez, 2002 y Palacios, 2009).

Como se puede observar en numerosos ejemplos, estos abovedamientos se caracterizaron por la multiplicación de sus nervios y la búsqueda de una complejidad creciente. Sin embargo, en numerosos casos, este aumento de la complejidad fue acompañado del empleo de recursos geométricos para la simplificación tanto del trazado como del proceso constructivo, como por ejemplo la repetición de las curvaturas de los arcos (Martín & Maira, 2013). Un paso más en el uso de estrategias para facilitar el control geométrico de estas bóvedas tan complejas fue el empleo del denominado “Prinzipalbogen” o arco principal, que aparece fundamentalmente en algunos textos e ilustraciones del ámbito centroeuropeo (Pliengo 2011, 1154). Este recurso permitió construir abovedamientos de una gran complejidad que hasta hoy en día supondrían un difícil reto para los arquitectos actuales.

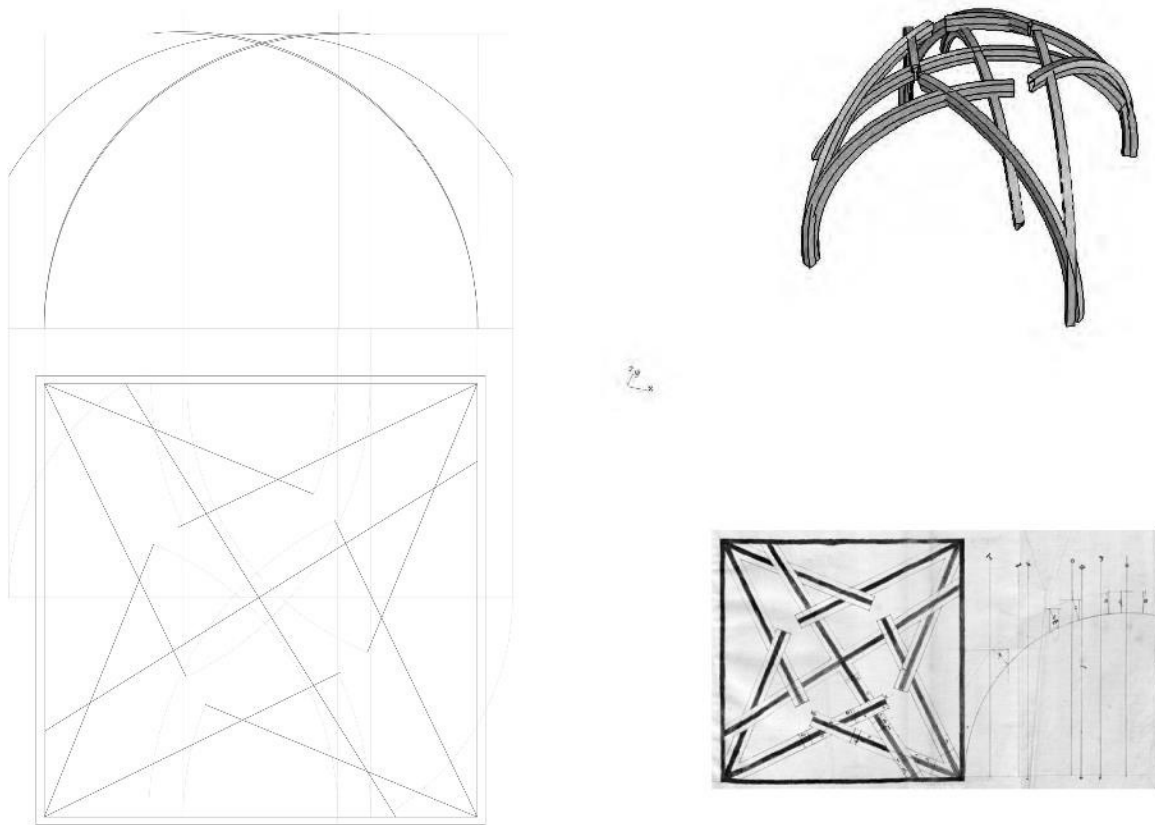
Pues bien, este reto fue el que se les planteó a los alumnos del Máster, si bien con la ayuda de una herramienta informática de modelado 3D para poder controlar al mismo tiempo tanto la proyección horizontal de la bóveda (su planta) como su volumetría espacial, algo de lo que carecían los maestros canteros medievales. No es el objetivo de esta ponencia detallar el complejo proceso de trazado de estas bóvedas (para ello, ver la bibliografía citada anteriormente), pero sí conviene subrayar que los alumnos debieron calcular, en un primer momento, las curvaturas de los distintos arcos a partir de la planta de la bóveda (figura 11). Posteriormente, realizaron un modelo tridimensional materializando la configuración volumétrica de estas obras (figura 12).

Figura 11. Trazado de una bóveda de crucería estrellada realizada por Laura Pilar López Gabaldón



Fuente: imagen de la autora.

Figura 12. Trazado y modelo 3D de una bóveda de crucería estrellada realizada por Marta Perelló Ocaña



Fuente: imagen de la autora.

La experiencia supuso sin duda un difícil reto para los alumnos, que debieron entender dicha configuración espacial compleja a partir de las proyecciones planas de los arcos. El paso de la realidad 3D al dibujo 2D y a la inversa es uno de los principios fundamentales de la representación gráfica arquitectónica, pero, al mismo tiempo, uno de los aspectos que más dificultades entraña para los alumnos de geometría y dibujo arquitectónico. En esta experiencia docente se establecieron niveles muy altos de exigencia intelectual, ya que eran necesarios para la comprensión formal de las bóvedas. Creemos que fue precisamente la motivación provocada por el hecho de tener que resolver el reto real planteado lo que llevó a los alumnos a esforzarse y llegar a alcanzar la comprensión geométrica de estos singulares abovedamientos. En este proceso de aprendizaje, la herramienta informática de modelado empleada fue esencial, ya que facilitó la visualización de las formas espaciales.

4. Conclusiones

A raíz de las tres experiencias docentes descritas, pueden extraerse algunas conclusiones. La primera y más clara es, sin duda, la eficacia de la vinculación del aprendizaje con el reto de la resolución de un problema práctico. Desde el momento en el que se invierte el proceso tradicional de enseñanza, mediante el cual primero se imparten unos contenidos teóricos para luego aplicarlos en uno o varios ejercicios, creemos que el interés y la motivación de los alumnos se multiplica. En los tres casos expuestos el inicio de la actividad consistió en el planteamiento de un reto, en este caso vinculado con la construcción de una bóveda o cúpula. A partir de aquí, los estudiantes comprendieron que era necesario adquirir una serie de conocimientos geométricos para poder resolver el problema constructivo planteado. De igual modo que los constructores medievales “aprendieron” geometría a partir de las necesidades que la práctica de la construcción les demandaba, los alumnos debieron buscar en los trazados geométricos las respuestas (es decir, los datos) para lograr crear sus propias bóvedas. La satisfacción del éxito al final del proceso reforzó sin duda el aprendizaje alcanzado y les hizo entender el porqué de la necesidad de estudiar los conceptos teóricos, algo que difícilmente ocurre con el proceso tradicional de enseñanza basado en lecciones magistrales. Además, en el caso del taller del colegio Ártica, el trabajo en equipo y la cooperación entre alumnos de distintos niveles mejoraron los resultados, ya que la motivación común por la resolución del problema (en este caso la construcción real de una bóveda) fue más fuerte aún que en los casos de trabajo individual.

Al comparar las tres experiencias docentes descritas en relación con el nivel de enseñanza, quizás la mayor diferencia sea el mayor entusiasmo y asombro por el descubrimiento realizado durante el aprendizaje en los alumnos de 2º de ESO respecto al resto de estudiantes de otros niveles. Quizás esto se deba, entre otras cosas, al

hecho de ser ellos los que ejecutaron físicamente las piezas que luego se colocarían en la bóveda; el ver cómo su estructura finalmente se mantuvo en el aire sin caer les provocó una notable satisfacción. En este sentido, también cabe destacar que la experiencia de la construcción real frente a la construcción “virtual” de la bóveda es, sin lugar a duda, más motivante para los alumnos (en este caso, los del colegio Ártica). Está claro que las herramientas digitales suponen una inestimable ayuda en la creación de modelos virtuales, y ello facilita enormemente los procesos de análisis y diseño en Arquitectura. Sin embargo, no llegan a alcanzar el potencial de asombro que la experiencia material proporciona.

En las experiencias docentes descritas se han combinado distintas formas de expresión gráfica: el dibujo a mano alzada de croquizado y diseño, el dibujo con útiles de dibujo (reglas, cuerdas, compases, etc.) a escala real, así como el dibujo y el modelado 3D con ordenador. Si bien en los dos primeros casos (la bóveda de crucería sencilla y la cúpula esférica) el planteamiento podría haberse realizado únicamente con el dibujo a mano, en el último (la bóveda de crucería estrellada), el empleo del ordenador ha sido un elemento prácticamente esencial para que los alumnos pudiesen comprender la complejidad del elemento que estaban creando. Con todo ello queremos subrayar la idea de que la combinación del dibujo manual y el asistido con ordenador puede ser la estrategia más efectiva en el proceso de análisis y diseño de la Arquitectura.

Existen detractores del uso del ordenador como herramienta de dibujo, los cuales abogan por una enseñanza de la geometría y el dibujo exclusivamente a mano; otros, por su parte, prácticamente se centran en las aplicaciones informáticas para la enseñanza, en particular, de la geometría. Nosotros, sin embargo, creemos que las dos herramientas no solo son compatibles, sino que cada una tiene unos objetivos distintos. Así, mientras que el dibujo a mano alzada es un instrumento de pensamiento gráfico, que debe estar siempre presente en los primeros momentos del análisis o del diseño, el ordenador permite desarrollar tanto dibujos 2D como modelos 3D más allá de donde alcanza el dibujo manual asistido con útiles como reglas, compás, etc. En las experiencias docentes planteadas siempre ha habido una fase inicial en la que la realización de bocetos a mano alzada ha permitido entender las bóvedas que se iban a crear. Sin este dibujo de pensamiento hubiese sido muy difícil abordar la creación de estas, tanto en su versión “material” como en formato “virtual”.

Para terminar, queremos volver a destacar que la enseñanza de la geometría debería estar siempre vinculada a su aplicación práctica. Para ello, creemos que una vía para conseguir que esta materia consiga motivar a los alumnos y despertar su curiosidad sería recuperar la idea de los maestros canteros medievales, es decir, la “geometría constructiva”, esa potente herramienta intelectual y abstracta que, sin embargo, les permitió levantar las espectaculares construcciones que hoy tanto admiramos.

5. Agradecimientos

Queremos agradecer, ante todo, a los alumnos que han participado en las experiencias docentes descritas, tanto los del Colegio Ártica como los de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid. Además, damos las gracias a los profesores del colegio Ártica que colaboraron en el taller y, especialmente, al esfuerzo y al apoyo de Alberto Peña y Mercedes Santos, sin los cuales hubiese sido imposible desarrollar esta iniciativa.

Referencias

- Calvo, J. (2020). *Stereotomy*. Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-43218-8>
- Erlande-Brandenburg, A., Pernoud, R., Gimpel, J. & Bechman, R. (2001). *Villard de Honnecourt. Cuaderno*. Akal.
- Franco, J.A. (2011). *Geometría descriptiva para la representación arquitectónica*. Andavira.
- Gómez, J. (2002). *El gótico español de la Edad Moderna. Bóvedas de crucería*. Universidad de Valladolid.
- Martín, R. & Maira, R. (2013). Del trazado a la construcción: versatilidad de las bóvedas de crucería, *Informes de la Construcción*, 65(extra-2), 21-34.
- Palacios, J.C. (1990). *Trazas y cortes de cantería en el Renacimiento español*. Munilla Lería.
- Palacios, J.C. & Martín, R. (2009). La Construcción de una Bóveda de Crujería en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, *Informes de la Construcción*, 61(515), 49-58.
- Palacios, J.C. (2009). *La cantería medieval. La construcción de la bóveda gótica española*. Munilla Lería.
- Pliengo, E. (2011). La geometría de las bóvedas estrelladas en el gótico tardío alemán, *Actas del Séptimo Congreso Nacional de Historia de la Construcción*. Instituto Juan de Herrera, 1147-1156.
- Pottmann H., Asperl A., Hofer M., Kilian A. & Bentley D. (2007). *Architectural geometry*. Bentley Institute Press.
- Rabasa, E. (2000). *Forma y construcción en piedra. De la cantería medieval a la estereotomía del siglo XIX*. Akal.
- Sánchez, J.A. (1998). *Geometría descriptiva: sistemas de proyección cilíndrica*. UPC.
- Shelby, R. (1997). The geometrical knowledge of medieval master masons, *Studies in the history of civil engineering. Vol. 1: The engineering of medieval cathedrals*. Aldeshot.
- Vandelvira, A. (ca. 1585). *Libro de trazas de cortes de piedras*. Manuscrito en la biblioteca de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid (ms. R10).